Historien om å løse ligninger

Tom Lindstrøm

Matematisk institutt
Universitetet i Oslo

11. april, 2024

Fra tidenes morgen

De eldste skriftlige matematikkildene vi har, stammer fra Egypt, Mesopotamia, India/Pakistan og Kina, og de inneholder alle eksempler på ligninger og ligningsløsning. Ofte er det bare svaret eller løsningsoppskriften som presenteres, og da kan det være vanskelig å vite hvordan forfatteren har kommet frem til løsningen.

Lineære ligninger og ligningssystemer

I de eldste kildene dreier det seg om lineære ligninger og ligningssystemer, altså problemer som vi ville ha skrevet på formen

$$ax = b$$

eller

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

Problemene er imidlertid formulert verbalt, og mye av utfordringen ligger i å oppfatte det matematiske innholdet.

Et eksempel fra Rhind-papyrusen (ca. 1550 f.Kr.)

Et tall pluss to tredjedeler av tallet pluss halvparten av tallet pluss en sjuendel av tallet er 33. Finn tallet.

Et eksempel fra Rhind-papyrusen (ca. 1550 f.Kr.)

Et tall pluss to tredjedeler av tallet pluss halvparten av tallet pluss en sjuendel av tallet er 33. Finn tallet.

I vår språkdrakt er dette

$$x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33$$

Kanskje ikke en veldig utfordrende ligning, men en oppgave som krever gode ferdigheter i brøkregning. (Svaret er forøvrig $\frac{1386}{97}$, så egypterne var åpenbart ikke så opptatt av pene svar.)

Regula falsi

Noen ligninger løses ved hjelp av algebraiske manipulasjoner som ligner på dem vi bruker i dag, men vanligere er det å bruke en gjette-og-justér-metode (regula falsi):

Regula falsi

Noen ligninger løses ved hjelp av algebraiske manipulasjoner som ligner på dem vi bruker i dag, men vanligere er det å bruke en gjette-og-justér-metode (regula falsi):

Eksempel (Rhind-papyrusen): *Finn en størrelse slik at når vi legger den til en fjerdedel av seg selv, får vi 15.*

I vårt språk er dette ligningen

$$x + \frac{x}{4} = 15$$

Regula falsi

Noen ligninger løses ved hjelp av algebraiske manipulasjoner som ligner på dem vi bruker i dag, men vanligere er det å bruke en gjette-og-justér-metode (regula falsi):

Eksempel (Rhind-papyrusen): *Finn en størrelse slik at når vi legger den til en fjerdedel av seg selv, får vi 15.*

I vårt språk er dette ligningen

$$x + \frac{x}{4} = 15$$

Vi gjetter først en løsning (gjerne en som gir behagelige regninger), f.eks. $x = 4$. Setter vi dette inn i venstresiden til ligningen, får vi 5 istedenfor 15. Dette er en faktor 3 for lite, så vi ganger gjetningen vår med 3 og får $x = 12$ som er løsningen.

Mer regula falsi

Babylorne brukte denne metoden også på ligningssystemer:

Eksempel: *En åker gir en avling på $\frac{2}{3}$ sila per sar, en annen åker gir bare en halv sila per sar. Til sammen har de to åkrene et areal på 1800 sar, og den første åkeren gir en avling som er 500 sila mer enn det den andre gir. Hvor store er åkrene?*

I vårt språk:

$$x + y = 1800$$
$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 500$$

Hvis vi først tipper at begge åkrene er like store, dvs. $x = y = 900$, blir venstresiden i den nederste ligningen for liten (vi får 150 istedenfor 500). Vi må derfor justere x opp og y ned til vi finner det riktige svaret. Hvis vi sier at den nye x'en er $900 + s$ og den nye y'en er $900 - s$, fører dette til ligningen $\frac{7}{6}s = 350$, som gir $s = 300$.

Gausseliminasjon før Gauss

Man kan få inntrykk av at løsningsmetodene var ganske primitive, men det er ikke alltid tilfellet. *Ni kapitler om den matematiske kunst* er en samling matematiske tekster skrevet i Kina fra ca. 1000 f.Kr. til årene rett etter at vår tidsregning begynner. Her finner vi en metode for å løse lineære ligningssystemer som er omtrent identisk med Gauss-eliminasjon slik den beskrives i moderne lærebøker.

Omvendingsmetoden

Et annet triks var å løse ligninger ved å regne baklengs:

Omvendingsmetoden

Et annet triks var å løse ligninger ved å regne baklengs:

Bhaskara II (1114-1185) til sin datter Lilavati:

"Vakre jomfru med strålende øyne, fortell meg, siden du forstår omvendingsmetoden, hvilket tall det er som ganget med 3, så forhøyet med 3/4 av produktet, så dividert med 7, forminsket med 1/3 av kvotienten, multiplisert med seg selv, forminsket med 52, tatt kvadratroten av, addert til 8 og dividert med 10, gir tallet 2?"

Annengradsligninger

Problemer som er ekvivalente med annengradsligninger dukker først opp i babylonske kilder rundt år 400 f.Kr. og som regel i en geometrisk kontekst. Ofte handler de om å finne sidene i et rektangel der omkretsen og arealet er gitt, altså et system av typen

$$\begin{aligned} x + y &= b \\ xy &= c, \end{aligned}$$

men det finnes også varianter der det f.eks. er differansen mellom sidene som er gitt.

Fullføre kvadratet – baklengs

Som i et tidligere eksempel starter vi med å fordele lengden likt på de to sidekantene, dvs. vi setter $x = \frac{b}{2}$ og $y = \frac{b}{2}$. Da får vi et kvadrat med side $\frac{b}{2}$, og med et areal $\frac{b^2}{4}$ som sannsynligvis er større enn det arealet c som vi ønsker oss.

Fullføre kvadratet – baklengs

Som i et tidligere eksempel starter vi med å fordele lengden likt på de to sidekantene, dvs. vi setter $x = \frac{b}{2}$ og $y = \frac{b}{2}$. Da får vi et kvadrat med side $\frac{b}{2}$, og med et areal $\frac{b^2}{4}$ som sannsynligvis er større enn det arealet c som vi ønsker oss.

For å få riktig areal justerer vi x opp en lengde s og justerer samtidig y ned en lengde s. Dermed har vi fått et nytt rektangel med sider $x = \frac{b}{2} + s$ og $y = \frac{b}{2} - s$.

Fullføre kvadratet – baklengs

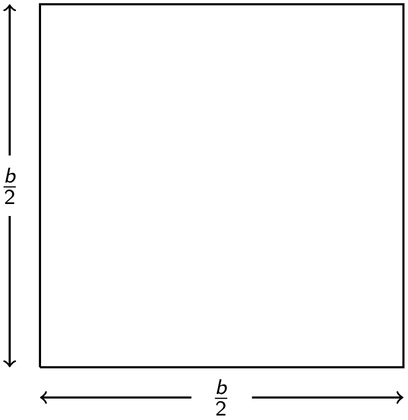
Som i et tidligere eksempel starter vi med å fordele lengden likt på de to sidekantene, dvs. vi setter $x = \frac{b}{2}$ og $y = \frac{b}{2}$. Da får vi et kvadrat med side $\frac{b}{2}$, og med et areal $\frac{b^2}{4}$ som sannsynligvis er større enn det arealet c som vi ønsker oss.

For å få riktig areal justerer vi x opp en lengde s og justerer samtidig y ned en lengde s. Dermed har vi fått et nytt rektangel med sider $x = \frac{b}{2} + s$ og $y = \frac{b}{2} - s$.

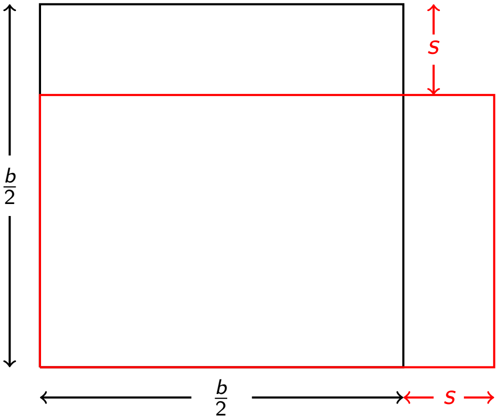
Vi prøver nå å velge s slik at rektangelet får det ønskede arealet c, dvs. slik at

$$\left(\frac{b}{2} + s\right)\left(\frac{b}{2} - s\right) = c$$

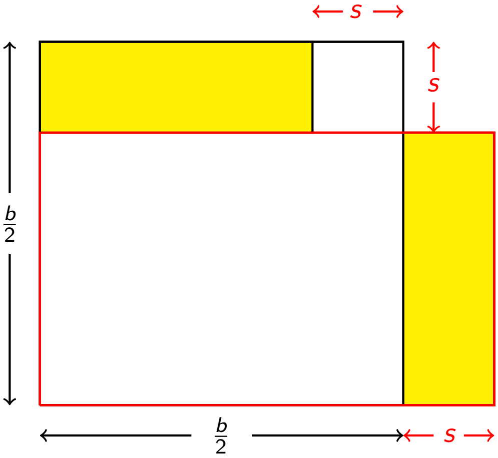
Litt hjelp fra geometrien



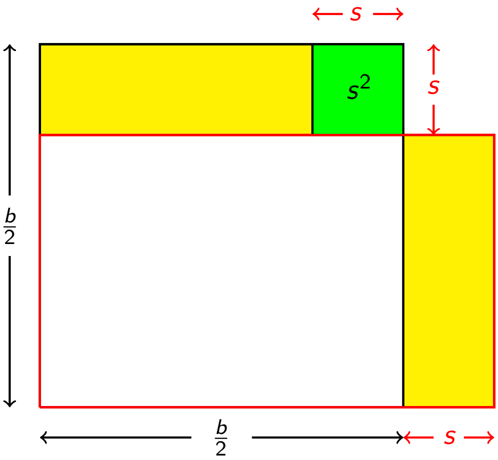
Litt hjelp fra geometrien



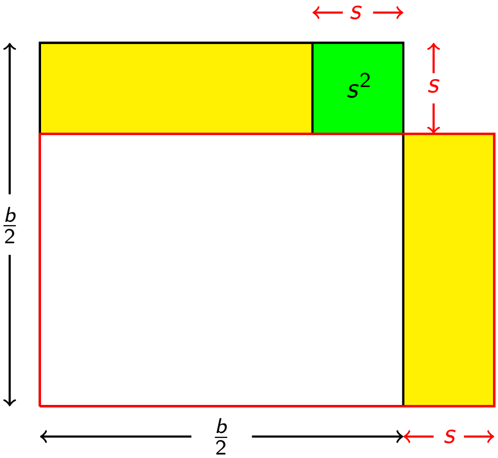
Litt hjelp fra geometrien



Litt hjelp fra geometrien



Litt hjelp fra geometrien



Arealet til det nye, "røde" rektangelet er $\frac{b^2}{4} - s^2$, og vi må velge s slik at denne størrelsen blir lik det ønskede arealet c, dvs. vi må velge s slik at $\frac{b^2}{4} - s^2 = c$.

Løsningen

Vi må altså løse ligningen

$$\frac{b^2}{4} - s^2 = c$$

for s, og det gir

$$s = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}.$$

Den lengste siden i rektangelet vårt blir derfor

$$x = \frac{b}{2} + s = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

og den korteste blir

$$y = \frac{b}{2} - s = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

Tredjegradsligninger

Det skulle gå nesten 2000 år fra babylonerne løste de første "annengradsligningene" til man fant algebraiske løsninger til tredjegradsligninger. I mellomtiden ble løsningsmetodene for annengradsligninger systematisert og videreutviklet i gresk, kinesisk, indisk og arabisk matematikk.

Tredjegradsligninger

Det skulle gå nesten 2000 år fra babylonerne løste de første "annengradsligningene" til man fant algebraiske løsninger til tredjegradsligninger. I mellomtiden ble løsningsmetodene for annengradsligninger systematisert og videreutviklet i gresk, kinesisk, indisk og arabisk matematikk.

Den persiske matematikeren, astronomen og poeten Omar Khayyam (1048-1131) gjorde det første betydningsfulle fremstøtet mot løsningen av tredjegradsligninger ved å vise hvordan alle slike ligninger kan løses geometrisk ved å se på skjæringspunkter mellom kjeglesnitt. Også Omar ville helst hatt algebraiske løsninger, men det skulle gå ennå fire hundre år før de ble funnet. Vi må forflytte oss til den italienske renessansen.

Komplikasjoner

For oss finnes det bare én type tredjegradsligning, men i oldtiden og renessansen fantes det mange. Grunnen var at datidens matematikere ikke aksepterte negative tall og null.
I dag ser vi på

$$x^3 + 7x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{og} \quad x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0$$

som to forskjellige eksempler på den samme typen tredjegradsligning

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

I det første tilfellet setter vi $a = 7, b = -2, c = -3$, i det andre tilfellet setter vi $a = -7, c = 2, d = 3$. For de italienske renessansematematikerne var imidlertid ikke dette mulig: -2, -3 og -7 var ikke tall!

Masse tredjegradsligninger

Isteden oppfattet datidens matematikere disse ligningene som forskjellige typer:

Masse tredjegradsligninger

Isteden oppfattet datidens matematikere disse ligningene som forskjellige typer:

$x^3 + 7x^2 - 2x - 3 = 0$ ble skrevet $x^3 + 7x^2 = 2x + 3$ og var av typen $x^3 + ax^2 = bx + c$, der $a, b, c > 0$.

Masse tredjegradsligninger

Isteden oppfattet datidens matematikere disse ligningene som forskjellige typer:

$x^3 + 7x^2 - 2x - 3 = 0$ ble skrevet $x^3 + 7x^2 = 2x + 3$ og var av typen $x^3 + ax^2 = bx + c$, der $a, b, c > 0$.

$x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0$ ble skrevet $x^3 + 2x + 3 = 7x^2$ og var av typen $x^3 + bx + c = ax^2$, der $a, b, c > 0$.

Masse tredjegradsligninger

Isteden oppfattet datidens matematikere disse ligningene som forskjellige typer:

$x^3 + 7x^2 - 2x - 3 = 0$ ble skrevet $x^3 + 7x^2 = 2x + 3$ og var av typen $x^3 + ax^2 = bx + c$, der $a, b, c > 0$.

$x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0$ ble skrevet $x^3 + 2x + 3 = 7x^2$ og var av typen $x^3 + bx + c = ax^2$, der $a, b, c > 0$.

Det fantes mange flere slike typer, f.eks. $x^3 = bx + c$ (0 var heller ikke et tall, og ligninger som "manglet" et ledd, måtte behandles separat). Ulike ligningstyper krevde i utgangspunktet forskjellige løsningsmetoder.

Scipione del Ferro

Den første som fant den algebraiske løsningen til en klasse tredjegradsligninger, var Scipione del Ferro (1465-1526), professor ved Universitetet i Bologna. Han arbeidet med ligninger av typen $ax^3 + cx = d$, og han demonstrerte løsningen på ligningen $3x^3 + 18x = 60$. (Det er ikke så vanskelig å prøve seg frem til at løsningen er $x = 2$, men del Ferros poeng var at han hadde en metode som fungerte for alle ligninger av denne typen.)

Hemmelighetskremmeri og dueller

Del Ferro holdt løsningsmetoden hemmelig, men lot den gå i arv til sin svigersønn Annibal della Nave og sin student Antonio Maria Fior. Utstyrt med del Ferros hemmelige metode følte Fior seg uovervinnelige og utfordret en av tidens ledende matematikere, Nicolo Tartaglia, til duell.

Knusende seier – med minst mulig margin

Duellantene stilte hverandre 20 problemer. Alle Fiors problemer dreide seg om tredjegradsligninger av del Ferros type, og Tartaglia skjønte at det måtte finnes en hemmelig metode. Han arbeidet som besatt, og rett før fristen gikk ut, gjennoppdaget han del Ferros metode. Dermed kunne han lett løse alle Fiors problemer, mens Fior bare greide noen få av hans. Seieren var et faktum, men Tartaglia hadde sikret den med bare noen timers margin.

Omverdenen blir interessert

Tartaglia var av samme type som del Ferro og Fior, og han ønsket å holde metodene sine hemmelig (han hadde på egen hånd funnet en løsningsmetode for ligninger på formen $x^3 + ax^2 = d$). Duellen med Fior hadde imidlertid vakt oppsikt, og flere hadde skjønt at det måtte finnes en hemmelig metode. En av dem var Girolamo Cardano (1501-76).

Girolamo Cardano

Cardano var utdannet lege, men han var en tusenkunstner som var interessert i alle mulige ting. Han skrev verdens første bok i sannsynlighetsregning (mest om gambling), og kardangleddet på biler er oppkalt etter ham. Han skrev også en bok om metoposkopi, "vitenskapen" om hvordan man fra et menneskes ansikt kan bestemme dets karakter. Her hevder han blant annet at en kvinne med vorte på venstre kinn, litt til venstre for smilehullet, ufravikelig vil bli myrdet av sin ektemann.

Cardano var interessert i Tartaglias metoder fordi han var iferd med å skrive en lærebok i algebra, *Ars Magna*.

Avtale og avtalebrudd

Etter mye overtalelse fikk Cardano lurt Tartaglia til å vise ham metodene sine, men han måtte love ikke å offentliggjøre dem. Han måtte også love å presentere Tartiglia for hoffet i Milano slik at Tartaglia kunne legge frem sine ideer om militæranlegg for fyrsten.

Cardano holdt løftet i mange år, men arbeidet samtidig videre med de typene tredjegradsligninger som Tartaglia ikke hadde løst. Han besøkte også Annibal della Nave i Bologna og fikk se del Ferros gamle notater. De viste at det ikke var Tartaglia som var den egentlige opphavsmannen til metodene, og Cardano følte seg dermed løst fra løftet sitt.

Ars Magna – og mer bråk

I 1545 publiserte Cardano *Ars Magna* med en fullstendig løsning av alle typer tredjegradsligninger. Tartaglia var rasende og krevde oppreisning. Cardano overlot oppgjøret til sin unge student Lodovico Ferrari (1522-65) som i 1548 knuste Tartaglia i en matematikkduell. Kanskje ikke så rart – Ferrari var selv en fremragende matematiker som i 1540 var den første som løste generelle fjerdegradsligninger.

Veien videre

Etter to tusen år med stillstand hadde de italienske renessansematematikerne i løpet av 25 år løst både tredjegrads- og fjerdegradsligningene, og optimismen må ha vært stor. Det skulle imidlertid ta nesten tre hundre år før det neste store gjennombruddet kom, og da på en måte som sikkert ville ha overrasket den italienske skolen: I 1824 viste Niels Henrik Abel at det var umulig å løse generelle femtegradsligninger ved hjelp av algebraiske operasjoner og rotutdragninger.

Lagranges systematisering

Det skjedde imidlertid én viktig ting på veien. I 1770/71 publiserte Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) en lang avhandling om algebraiske ligninger der han systematiserte og videreutviklet løsningsmetodene for tredje- og fjerdegradsligninger. Lagrange viste at alle algebraiske ligninger har en assosiert ligning, *resolventligningen*, slik at hvis man kan løse denne, kan man også løse den opprinnelige ligningen. For ligninger av tredje og fjerde grad er resolventligningen enklere å løse enn den opprinnelige ligningen, men dette er ikke tilfellet for generelle ligninger av grad fem og høyere.

Lagranges systematisering

Det skjedde imidlertid én viktig ting på veien. I 1770/71 publiserte Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) en lang avhandling om algebraiske ligninger der han systematiserte og videreutviklet løsningsmetodene for tredje- og fjerdegradsligninger. Lagrange viste at alle algebraiske ligninger har en assosiert ligning, *resolventligningen*, slik at hvis man kan løse denne, kan man også løse den opprinnelige ligningen. For ligninger av tredje og fjerde grad er resolventligningen enklere å løse enn den opprinnelige ligningen, men dette er ikke tilfellet for generelle ligninger av grad fem og høyere.

Lagrange konstruerte resolventligningene ved å ta utgangspunkt i alle ombytter (permutasjoner) av løsningene til de opprinnelige ligningene, og denne tenkemåten la grunnlaget for Ruffinis, Abels og Galois' senere arbeider om løsbarhet av ligninger.

Slutt

Takk for oppmerksomheten!