Mémoire

sur

les équations algébriques

où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième dégré

par

N. H. Abel.

Christiania.
De l'imprimerie de *Groendahl.*
1824.

Démonstration

de l'impossibilité de la résolution générale des équations du cinquième dégré.

Les géomètres se sont beaucoup occupés de la résolution générale des équations algébriques, et plusieurs d'entre eux ont cherché à en prouver l'impossibilité; mais si je ne me trompe pas, on n'a pas y reussi jusqu'à présent. J'ose donc esperer que les géomètres veulent recevoir avec bienveillance ce mémoire qui a pour but de remplir cette lacune dans la théorie des équations algébriques.

Soit

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = o$$

l'équation générale du cinquième dégré et supposons qu'elle est résoluble algébriquement c'est-à-dire qu'on peut exprimer y par une fonction des quantités a b c d et e, formée par des radicaux. Il est clair qu'on peut dans ce cas mettre y sous cette forme:

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots\ldots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

m étant un nombre premier et R p p_1 p_2 etc. des fonctions de la même forme que y, et ainsi de suite jusqu' à ce qu'on parviendra à des fonctions rationnelles des quantités a b c d et e. On peut aussi supposer qu'il est impossible d'exprimer $R^{\frac{1}{m}}$ par une fonction rationnelle des quantités a b etc. p p_1 p_2 etc., et en mettant $\frac{R}{p_1^m}$ au lieu de R il est clair qu'on peut faire $p_1 = 1$. On aura donc:

$$y = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots p_{m-1} . R^{\frac{m-1}{m}}$$

Démonstration

de l'impossibilité de la résolution générale des équations du cinquième degré.

Les géomètres se sont beaucoup occupés de la résolution générale des équations algébriques, et plusieurs d'entre eux ont cherché à en prouver l'impossibilité; mais si je ne me trompe pas, on n'a pas reussi jusqu'à présent. J'ose donc esperer que les géomètres veulent recevoir avec bienveillance ce mémoire qui a pour but de remplir cette lacune dans la théorie des équations algébriques.

Soit

$$\boxed{y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0}$$

l'équation générale du cinquième dégré et supposons qu'elle est résoluble algébriquement c'est-à-dire qu'on peut exprimer y par une fonction des quantités a b c d et e, formée par des radicaux. Il est clair qu'on peut dans ce cas mettre y sous cette forme:

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \dots\dots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

m étant un nombre premier et R p p_1 p_2 etc. des fonctions de la même forme que y, et ainsi de suite jusqu' à ce qu'on parviendra à des fonctions rationnelles des quantités a b c d et e. On peut aussi supposer qu'il est impossible d'exprimer $R^{\frac{1}{m}}$ par une fonction rationnelle des quantités a b etc. p p_1 p_2 etc., et en mettant $\frac{R}{p_1^m}$ au lieu de R il est clair qu'on peut faire $p_1 = 1$. On aura donc:

$$y = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \dots p_{m-1} . R^{\frac{m-1}{m}}$$

Démonstration

de l'impossibilité de la résolution générale des équations du cinquième degré.

Les géomètres se sont beaucoup occupés de la résolution générale des équations algébriques, et plusieurs d'entre eux ont cherché à en prouver l'impossibilité; mais si je ne me trompe pas, on n'a pas reussi jusqu'à présent. J'ose donc esperer que les géomètres veulent recevoir avec bienveillance ce mémoire qui a pour but de remplir cette lacune dans la théorie des équations algébriques.

Soit

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = o$$

l'équation générale du cinquième dégré et supposons qu'elle est résoluble algébriquement c'est-à-dire qu'on peut exprimer y par une fonction des quantités $a\ b\ c\ d$ et e, formée par des radicaux. Il est clair qu'on peut dans ce cas mettre y sous cette forme:

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots\ldots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

m étant un nombre premier et $R\ p\ p_1\ p_2$ etc. des fonctions de la même forme que y, et ainsi de suite jusqu' à ce qu'on parviendra à des fonctions rationnelles des quantités $a\ b\ c\ d$ et e. On peut aussi supposer qu'il est impossible d'exprimer $R^{\frac{1}{m}}$ par une fonction rationnelle des quantités $a\ b$ etc. $p\ p_1\ p_2$ etc., et en mettant $\frac{R}{p_1^m}$ au lieu de R il est clair qu'on peut faire $p_1 = 1$. On aura donc:

$$\boxed{y = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots p_{m-1} . R^{\frac{m-1}{m}}}$$

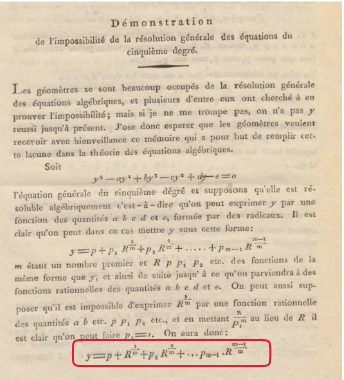
At løsningene er på denne formen betyr at det finnes en formel for dem, uttrykt ved koeffisientene i den opprinnelige likningen.

Vi har det tilsvarende i abc-formelen for løsningene

$$y = -\frac{b}{2a} \pm \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

til 2.gradslikningen

$$ay^2 + by + c = 0$$



Démonstration

de l'impossibilité de la résolution générale des équations du cinquième degré.

Les géomètres se sont beaucoup occupés de la résolution générale des équations algébriques, et plusieurs d'entre eux ont cherché à en prouver l'impossibilité; mais si je ne me trompe pas, on n'a pas y reussi jusqu'à présent. J'ose donc esperer que les géomètres veulent recevoir avec bienveillance ce mémoire qui a pour but de remplir cette lacune dans la théorie des équations algébriques.

Soit

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = o$$

l'équation générale du cinquième dégré et supposons qu'elle est résoluble algébriquement c'est-à-dire qu'on peut exprimer y par une fonction des quantités a b c d et e, formée par des radicaux. Il est clair qu'on peut dans ce cas mettre y sous cette forme:

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots\ldots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

m étant un nombre premier et R p p_1 p_2 etc. des fonctions de la même forme que y, et ainsi de suite jusqu' à ce qu'on parviendra à des fonctions rationnelles des quantités a b c d et e. On peut aussi supposer qu'il est impossible d'exprimer $R^{\frac{1}{m}}$ par une fonction rationnelle des quantités a b etc. p p_1 p_2 etc., et en mettant $\frac{R}{p_1^m}$ au lieu de R il est clair qu'on peut faire $p_1 = 1$. On aura donc:

$$\boxed{y = p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots p_{m-1} \cdot R^{\frac{m-1}{m}}}$$

Det samme gjelder for Cardanos formel for løsningen av 3. gradslikninger. (Uten tap av generalitet kan vi substituere bort 2. gradsleddet)

$$y^3 + py + q = 0$$

Cardanos formel sier at løsningene er gitt ved

$$\begin{aligned} y_1 &= R^{\frac{1}{3}} - \tfrac{p}{3R} R^{\frac{2}{3}} \\ y_2 &= \omega R^{\frac{1}{3}} - \omega^2 \tfrac{p}{3R} R^{\frac{2}{3}} \\ y_3 &= \omega^2 R^{\frac{1}{3}} - \omega \tfrac{p}{3R} R^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

hvor $R = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} + S^{\frac{1}{2}}$ og $\omega^3 = 1$, $\omega \neq 1$, hvor $S = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ er en rasjonal funksjon i koeffisientene i den opprinnelige likningen.

Vi kan gjøre det samme for et vilkårlig odde primtall m:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= p + R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} \cdots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} \\
y_2 &= p + \omega R^{\frac{1}{m}} + \omega^2 p_2 R^{\frac{2}{m}} \cdots + \omega^{m-1} p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} \\
y_3 &= p + \omega^2 R^{\frac{1}{m}} + \omega^4 p_2 R^{\frac{2}{m}} \cdots + \omega^{2m-2} p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} \\
&\vdots \\
y_m &= p + \omega^{m-1} R^{\frac{1}{m}} + \omega^{m-2} p_2 R^{\frac{2}{m}} \cdots + \omega p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}
\end{aligned}
$$

hvor $\omega^m = 1$ og $\omega \neq 1$. Vi kan løse dette systemet med hensyn på p, $R^{\frac{1}{m}}$, osv.

Da får vi

$$
\begin{aligned}
p &= \frac{1}{m}\left(y_1 + y_2 + \cdots + y_m\right) \\
R^{\frac{1}{m}} &= \frac{1}{m}\left(\omega^{m-1} y_1 + \omega^{m-2} y_2 + \cdots + \omega y_m\right) \\
p_2 R^{\frac{2}{m}} &= \frac{1}{m}\left(\omega^{m-2} y_1 + \omega^{m-4} y_2 + \cdots + \omega^2 y_m\right) \\
&\vdots \\
p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}} &= \frac{1}{m}\left(\omega y_1 + \omega^2 y_2 + \cdots + \omega^{m-1} y_m\right)
\end{aligned}
$$

$$q=0 \quad q_1=0 \quad \text{etc.} \quad q_{m-1}=0$$

Si maintenant ces équations ont lieu, il est clair que l'équation proposée est satisfaite par toutes les valeurs qu'on obtiendra pour y en donnant à $R^{\frac{1}{m}}$ toutes les valeurs

$$R^{\frac{1}{m}}, \alpha R^{\frac{1}{m}}, \alpha^2 R^{\frac{1}{m}}, \alpha^3 R^{\frac{1}{m}}, \text{etc.}\ \alpha^{m-1} \cancel{R^{\frac{m-1}{m}}}$$? $\frac{1}{m}$

α étant une racine de l'équation

$$\alpha^{m-1}+\alpha^{m-2}+\ldots+\alpha+1=0$$

On voit aussi que toutes ces valeurs de y sont différentes; car dans le cas contraire on aurait une équation de la même forme que l'équation $P=0$, et une telle équation conduit comme on vient de voir à un résultat qui ne peut pas avoir lieu. Le nombre m ne peut donc surpasser 5. En désignant donc par $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ et y_5 les racines de l'équation proposée on aura:

$$y_1=p+R^{\frac{1}{m}}+p_2 R^{\frac{2}{m}}+\ldots+p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

$$y_2=p+\alpha R^{\frac{1}{m}}+\alpha^2 p_2 R^{\frac{2}{m}}+\ldots+\alpha^{m-1} p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}$$

$$y_m=p+\alpha^{m-1} R^{\frac{1}{m}}+\alpha^{m-2} p_2 R^{\frac{2}{m}}+\ldots+\alpha . p_{m-1} . R^{\frac{m-1}{m}}$$

De ces équations on tirera sans peine:

$$p=\tfrac{1}{m}(y_1+y_2+\ldots+y_m)$$

$$R^{\frac{1}{m}}=\tfrac{1}{m}(y_1+\alpha^{m-1}y_2+\ldots+\alpha y_m)$$

$$p_2 R^{\frac{2}{m}}=\tfrac{1}{m}(y_1+\alpha^{m-2}y_2+\ldots+\alpha^2 y_m)$$

$$\vdots$$

$$p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}}=\tfrac{1}{m}(y_1+\alpha y_2+\ldots+\alpha^{m-1}y_m)$$

On voit par là que $p\ p_1$ etc. p_{m-1} R et $R^{\frac{1}{m}}$ sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée.

Considerons maintenant une quelconque de ces quantités, par exemple R. Soit

Siden rotuttrykkene $R^{\frac{1}{m}}$ er sammensatt slik at R også er på formen $R = q + q_1 S^{\frac{1}{n}} + q_2 S^{\frac{2}{n}} + \cdots + q_{n-1} S^{\frac{n-1}{n}}$ og tilsvarende for S, osv. lar Abel nå $r = R^{\frac{1}{m}}$ være den "innerste", som derfor er en rasjonal funksjon i koeffisientene til den opprinnelige 5. gradslikningen.

Vi, og Abel, vet at koeffisientene til likningen er symmetriske funksjoner i røttene. Hvorfor? Fordi likningen kan skrives som

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = (y - y_1)(y - y_2) \ldots (y - y_5) = 0$$

og denne endrer seg ikke når vi bytter om på røttene.

$$R = S + v^{\frac{1}{n}} + S_2 v^{\frac{2}{n}} + \ldots + S_{n-1} \cdot v^{\frac{n-1}{n}}$$

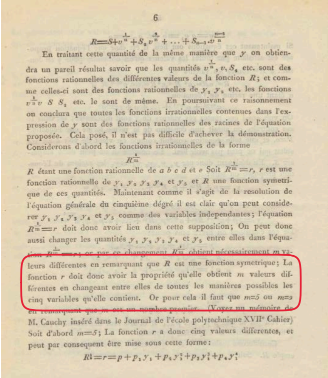
En traitant cette quantité de la même manière que y on obtiendra un pareil résultat savoir que les quantités $v^{\frac{1}{n}}$, v, S_2 etc. sont des fonctions rationnelles des différentes valeurs de la fonction R; et comme celles-ci sont des fonctions rationnelles de y_1 y_2 etc. les fonctions $v^{\frac{1}{n}} v$ S S_2 etc. le sont de même. En poursuivant ce raisonnement on conclura que toutes les fonctions irrationnelles contenues dans l'expression de y sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée. Cela posé, il n'est pas difficile d'achever la démonstration. Considerons d'abord les fonctions irrationnelles de la forme

$$R^{\frac{1}{m}}$$

R étant une fonction rationnelle de a b c d et e Soit $R^{\frac{1}{m}} = r$, r est une fonction rationnelle de y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 et R une fonction symetrique de ces quantités. Maintenant comme il s'agit de la resolution de l'équation générale du cinquième degré il est clair qu'on peut considerer y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 comme des variables independantes; l'équation $R^{\frac{1}{m}} = r$ doit donc avoir lieu dans cette supposition; On peut donc aussi changer les quantités y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 entre elles dans l'équation $R^{\frac{1}{m}} = r$; or par ce changement $R^{\frac{1}{m}}$ obtient nécessairement m valeurs différentes en remarquant que R est une fonction symetrique; La fonction r doit donc avoir la propriété qu'elle obtient m valeurs différentes en changeant entre elles de toutes les manières possibles les cinq variables qu'elle contient. Or pour cela il faut que $m=5$ ou $m=2$ en remarquant que m est un nombre premier. (Voyez un mémoire de M. Cauchy inséré dans le Journal de l'école polytechnique XVII[e] Cahier) Soit d'abord $m=5$; La fonction r a donc cinq valeurs differentes, et peut par consequent être mise sous cette forme:

$$R^{\frac{1}{5}} = r = p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4$$

Siden R er en symmetrisk funksjon i røttene, og derfor er upåvirket av permutasjoner av røttene, vil funksjonen $r = R^{\frac{1}{m}}$ være en multivaluert funksjon med m verdier ved permutasjoner av røttene. De m verdiene er de forskjellige m-te-røttene av R.



6

$$R = S + v^{\frac{1}{n}} + S_2 v^{\frac{2}{n}} + \ldots + S_{n-1} . v^{\frac{n-1}{n}}$$

En traitant cette quantité de la même manière que y on obtiendra un pareil résultat savoir que les quantités $v^{\frac{1}{n}}, v, S_2$ etc. sont des fonctions rationnelles des différentes valeurs de la fonction R; et comme celles-ci sont des fonctions rationnelles de y_1 y_2 etc. les fonctions $v^{\frac{1}{n}} v$ S S_2 etc. le sont de même. En poursuivant ce raisonnement on conclura que toutes les fonctions irrationnelles contenues dans l'expression de y sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée. Cela posé, il n'est pas difficile d'achever la démonstration. Considerons d'abord les fonctions irrationnelles de la forme

$$R^{\frac{1}{m}}$$

R étant une fonction rationnelle de a b c d et e Soit $R^{\frac{1}{m}} = r$, r est une fonction rationnelle de y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 et R une fonction symetrique de ces quantités. Maintenant comme il s'agit de la resolution de l'équation générale du cinquième dégré il est clair qu'on peut considerer y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 comme des variables independantes; l'équation $R^{\frac{1}{m}} = r$ doit donc avoir lieu dans cette supposition; On peut donc aussi changer les quantités y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 entre elles dans l'équation $R^{\frac{1}{m}} = r$; or par ce changement $R^{\frac{1}{m}}$ obtient nécessairement m valeurs différentes en remarquant que R est une fonction symetrique; La fonction r doit donc avoir la propriété qu'elle obtient m valeurs différentes en changeant entre elles de toutes les manières possibles les cinq variables qu'elle contient. Or pour cela il faut que $m=5$ ou $m=2$ en remarquant que m est un nombre premier. (Voyez un mémoire de M. Cauchy inséré dans le Journal de l'école polytechnique XVII^e Cahier) Soit d'abord $m=5$; La fonction r a donc cinq valeurs differentes, et peut par consequent être mise sous cette forme:

$$R^{\frac{1}{5}} = r = p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4$$

Vi kan se på dette for en 2. gradslikning, $x^2 + bx + c = 0$ med røtter

$$x_1 = -\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}, \quad x_2 = -\frac{b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4c}$$

Vi har $b = -x_1 - x_2$ og $c = x_1 x_2$. Det gir

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{-x_1 - x_2}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 4x_1x_2} \\ &= \frac{x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 - x_2)^2}}{2} \\ x_2 &= \frac{x_1 + x_2 - \sqrt{(x_1 - x_2)^2}}{2} \end{aligned}$$

En avgjørende observasjon i Abels arbeid er at $\sqrt{(x_1 - x_2)^2}$ må betraktes som en funksjon som gir to ulike verdier når vi bytter om på røttene. Hvis vi tar for gitt at

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2}$$

er konsekvensen av ombyttingen $x_1 \leftrightarrow x_2$

$$x_1 = \frac{x_1 + x_2 + \sqrt{(x_1 - x_2)^2}}{2} \leftrightarrow x_2 = \frac{x_2 + x_1 + \sqrt{(x_2 - x_1)^2}}{2}$$

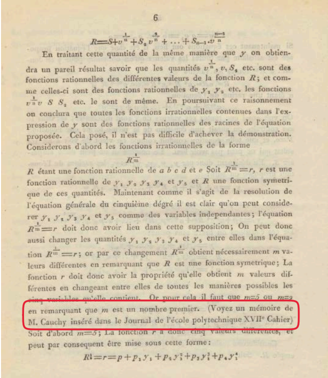
dvs. $x_1 = x_2$.

Hvis vi heller bruker at $\sqrt{(x_1 - x_2)^2} = x_1 - x_2$ får vi ved å bytte om på røttene $x_1 \leftrightarrow x_2$ at

$$x_1 = \frac{x_1 + x_2 + (x_1 - x_2)}{2} \leftrightarrow \frac{x_2 + x_1 + (x_2 - x_1)}{2} = x_2$$

"Cauchy is mad and there is nothing that can be done about him, although, right now, he is the only one who knows how mathematics should be done."

Niels Henrik Abel, 1826



6

$$R = S + v^{\frac{1}{n}} + S_2 v^{\frac{2}{n}} + \ldots + S_{n-1} . v^{\frac{n-1}{n}}$$

En traitant cette quantité de la même manière que y on obtiendra un pareil résultat savoir que les quantités $v^{\frac{1}{n}}, v, S_2$ etc. sont des fonctions rationnelles des différentes valeurs de la fonction R; et comme celles-ci sont des fonctions rationnelles de y_1 y_2 etc. les fonctions $v^{\frac{1}{n}} v$ S S_2 etc. le sont de même. En poursuivant ce raisonnement on conclura que toutes les fonctions irrationnelles contenues dans l'expression de y sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée. Cela posé, il n'est pas difficile d'achever la démonstration. Considerons d'abord les fonctions irrationnelles de la forme

$$R^{\frac{1}{m}}$$

R étant une fonction rationnelle de a b c d et e Soit $R^{\frac{1}{m}} = r$, r est une fonction rationnelle de y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 et R une fonction symetrique de ces quantités. Maintenant comme il s'agit de la resolution de l'équation générale du cinquième dégré il est clair qu'on peut considerer y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 comme des variables independantes; l'équation $R^{\frac{1}{m}} = r$ doit donc avoir lieu dans cette supposition; On peut donc aussi changer les quantités y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 entre elles dans l'équation $R^{\frac{1}{m}} = r$; or par ce changement $R^{\frac{1}{m}}$ obtient nécessairement m valeurs différentes en remarquant que R est une fonction symetrique; La fonction r doit donc avoir la propriété qu'elle obtient m valeurs différentes en changeant entre elles de toutes les manières possibles les cinq variables qu'elle contient. Or pour cela il faut que $m=5$ ou $m=2$ en remarquant que m est un nombre premier. (Voyez un mémoire de M. Cauchy inséré dans le Journal de l'école polytechnique XVII^e Cahier) Soit d'abord $m=5$; La fonction r a donc cinq valeurs différentes, et peut par consequent être mise sous cette forme:

$$R^{\frac{1}{5}} = r = p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4$$

Teorem. *(Cauchy; Journal de L'école polytechnique, Vol. 17, 1815)*
La $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ være en funksjon i n variable. For et vilkårlig n-tuppel $(x_1, \ldots, x_n)$ lar vi

$$f_\Sigma(x) = \{f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \mid \sigma \in \Sigma_n\}$$

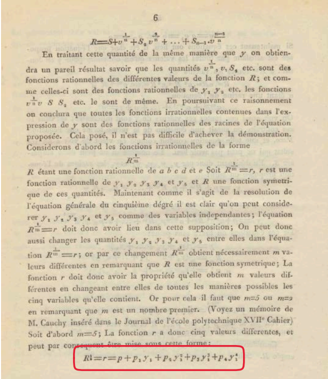
være mengden av verdier f antar når vi gjennomløper alle permutasjoner $\sigma \in \Sigma_n$ av tallene $1, 2, \ldots, n$. La $m = |f_\Sigma(x)|$ være antall elementer i denne mengden. Dersom $m < p$, hvor p er det største primtallet som er mindre enn eller lik n og hvor vi antar $p > 3$, så er $m = 1$ eller $m = 2$.

I vårt tilfelle er $n = p = 5$. Det betyr at $m = 1$ (uinteressant), $m = 2$ eller $m = 5$.

Abel slår fast, uten bevis, at siden funksjonen har 5 verdier når vi permuterer røtter, må den være på formen

$$R^{\frac{1}{m}} = p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4$$

hvor y_1 er en av røttene og p_i er symmetriske funksjoner i røttene. I et senere arbeid skriver Abel ut dette beviset.



6

$$R = S + v^{\frac{1}{n}} + S_2 v^{\frac{2}{n}} + \dots + S_{n-1} . v^{\frac{n-1}{n}}$$

En traitant cette quantité de la même manière que y on obtiendra un pareil résultat savoir que les quantités $v^{\frac{1}{n}}$, v, S_2 etc. sont des fonctions rationnelles des différentes valeurs de la fonction R; et comme celles-ci sont des fonctions rationnelles de y_1 y_2 etc. les fonctions $v^{\frac{1}{n}} v$ S S_2 etc. le sont de même. En poursuivant ce raisonnement on conclura que toutes les fonctions irrationnelles contenues dans l'expression de y sont des fonctions rationnelles des racines de l'équation proposée. Cela posé, il n'est pas difficile d'achever la démonstration. Considerons d'abord les fonctions irrationnelles de la forme

$$R^{\frac{1}{m}}$$

R étant une fonction rationnelle de a b c d et e Soit $R^{\frac{1}{m}} = r$, r est une fonction rationnelle de y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 et R une fonction symetrique de ces quantités. Maintenant comme il s'agit de la resolution de l'équation générale du cinquième dégré il est clair qu'on peut considerer y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 comme des variables independantes; l'équation $R^{\frac{1}{m}} = r$ doit donc avoir lieu dans cette supposition; On peut donc aussi changer les quantités y_1 y_2 y_3 y_4 et y_5 entre elles dans l'équation $R^{\frac{1}{m}} = r$; or par ce changement $R^{\frac{1}{m}}$ obtient nécessairement m valeurs différentes en remarquant que R est une fonction symetrique; La fonction r doit donc avoir la propriété qu'elle obtient m valeurs différentes en changeant entre elles de toutes les manières possibles les cinq variables qu'elle contient. Or pour cela il faut que $m=5$ ou $m=2$ en remarquant que m est un nombre premier. (Voyez un mémoire de M. Cauchy inséré dans le Journal de l'école polytechnique XVII[e] Cahier) Soit d'abord $m=5$; La fonction r a donc cinq valeurs differentes, et peut par conséquent être mise sous cette forme:

$$\boxed{R^{\frac{1}{5}} = r = p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4}$$

For en 2.gradslikning $x^2 + bx + c = 0$ med $R = b^2 - 4c$ har vi

$$R^{\frac{1}{2}} = b + 2x_1$$

og for en tredjegradslikning $x^3 + px + q = 0$

$$R^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{9R + p^3}(2p^2 + 9Rx_1 + 3px_1^2)$$

hvor $R = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$.

Hvis vi substituerer $R^{\frac{1}{5}}$ med $\omega R^{\frac{1}{5}}$, der $\omega^5 = 1$ i uttrykket

$$R^{\frac{1}{5}} = p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4$$

får vi tilsvarende uttrykk, med med y_2:

$$\omega R^{\frac{1}{5}} = p + p_1 y_2 + p_2 y_2^2 + p_3 y_2^3 + p_4 y_2^4$$

Alternativt kan vi multiplisere uttrykket med ω;

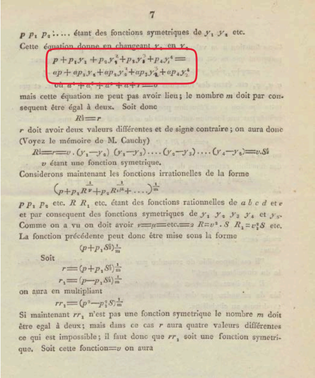
$$\omega R^{\frac{1}{5}} = \omega p + \omega p_1 y_1 + \omega p_2 y_1^2 + \omega p_3 y_1^3 + \omega p_4 y_1^4$$

Det gir oss to forskjellige uttrykk som representerer samme størrelse.

Gjentagelse av denne prosessen gir en likhet mellom tilsvarende uttrykk for alle de 5 røttene. En permutasjon av røttene som fikserer y_3, men bytter y_1 og y_2 forandrer ikke verdien av uttrykket, men gir

$$p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4$$
$$= \omega(p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4)$$

som er umulig siden $\omega \neq 1$. Det betyr at i dette tilfellet må vi ha $m = 2$.


7

$p\ p_1\ p_2 \ldots\ldots$ étant des fonctions symetriques de $y_1\ y_2$ etc.

Cette équation donne en changeant y_1 en y_2

$$p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4 =$$
$$\alpha p + \alpha p_1 y_2 + \alpha p_2 y_2^2 + \alpha p_3 y_2^3 + \alpha p_4 y_2^4$$

ou $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

mais cette équation ne peut pas avoir lieu; le nombre m doit par consequent être égal à deux. Soit donc

$$R^{\frac{1}{2}} = r$$

r doit avoir deux valeurs différentes et de signe contraire; on aura donc (Voyez le mémoire de M. Cauchy)

$$R^{\frac{1}{2}} = r = v \cdot (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) \ldots\ldots (y_2 - y_3) \ldots\ldots (y_4 - y_5) = v . S^{\frac{1}{2}}$$

v étant une fonction symetrique.

Considerons maintenant les fonctions irrationelles de la forme

$$\left(p + p_1 R^{\frac{1}{\nu}} + p_2 R_1^{\frac{1}{\mu}} + \ldots\right)^{\frac{1}{m}}$$

$p\ p_1\ p_2$ etc. $R\ R_1$ etc. étant des fonctions rationnelles de $a\ b\ c\ d$ et e et par consequent des fonctions symetriques de $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ et y_5. Comme on a vu on doit avoir $\nu = \mu = $ etc. $= 2$ $R = v^2 . S$ $R_1 = v_1^2 S$ etc. La fonction précédente peut donc être mise sons la forme

$$(p + p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}$$

Soit

$$r = (p + p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}$$
$$r_1 = (p - p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}$$

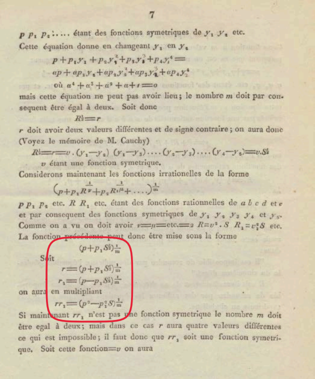
on aura en multipliant

$$r r_1 = (p^2 - p_1^2 S)^{\frac{1}{m}}$$

Si maintenant rr_1 n'est pas une fonction symetrique le nombre m doit être egal à deux; mais dans ce cas r aura quatre valeurs différentes ce qui est impossible; il faut donc que rr_1 soit une fonction symetrique. Soit cette fonction$=v$ on aura

$$r = (p + p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}$$
$$r_1 = (p - p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}$$

$$v = rr_1 = (p^2 - p_1^2 S)^{\frac{1}{m}}$$



$p\ p_1\ p_2 \ldots\ldots$ étant des fonctions symetriques de $y_1\ y_2$ etc.
Cette équation donne en changeant y_1 en y_2

$$p + p_1 y_1 + p_2 y_1^2 + p_3 y_1^3 + p_4 y_1^4 =$$
$$\alpha p + \alpha p_1 y_2 + \alpha p_2 y_2^2 + \alpha p_3 y_2^3 + \alpha p_4 y_2^4$$
où $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

mais cette équation ne peut pas avoir lieu; le nombre m doit par consequent être égal à deux. Soit donc

$$R^{\frac{1}{2}} = r$$

r doit avoir deux valeurs différentes et de signe contraire; on aura donc (Voyez le mémoire de M. Cauchy)

$$R^{\frac{1}{2}} = r = v.(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)\ldots\ldots(y_2 - y_3)\ldots\ldots(y_4 - y_5) = v.S^{\frac{1}{2}}$$

v étant une fonction symetrique.

Considerons maintenant les fonctions irrationelles de la forme

$$(p + p_1 R^{\frac{1}{\nu}} + p_2 R_1^{\frac{1}{\mu}} + \ldots\ldots)^{\frac{1}{m}}$$

$p\ p_1\ p_2$ etc. $R\ R_1$ etc. étant des fonctions rationnelles de $a\ b\ c\ d$ et e et par consequent des fonctions symetriques de $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ et y_5. Comme on a vu on doit avoir $\nu = \mu = \text{etc.} = 2$ $R = v^2.S$ $R_1 = v_1^2 S$ etc. La fonction précédente peut donc être mise sons la forme

$$(p + p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}$$

Soit

$$r = (p + p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}$$
$$r_1 = (p - p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}$$

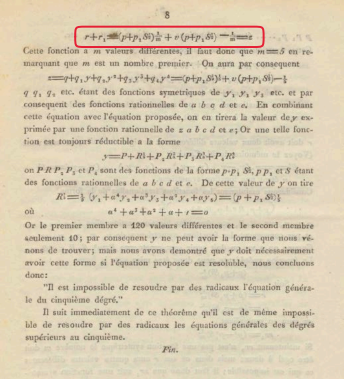
on aura en multipliant

$$rr_1 = (p^2 - p_1^2 S)^{\frac{1}{m}}$$

Si maintenant rr_1 n'est pas une fonction symetrique le nombre m doit être egal à deux; mais dans ce cas r aura quatre valeurs différentes ce qui est impossible; il faut donc que rr_1 soit une fonction symetrique. Soit cette fonction $= v$ on aura

$$
\begin{aligned}
z &= r + r_1 \\
&= (p + p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}} + v(p + p_1 S^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{m}}
\end{aligned}
$$

hvor $v = (p^2 - p_1^2 S)^{\frac{1}{m}}$. Funksjonen z er åpenbart invariant under ombytting av de to røttene. Funksjonen er i tillegg multi-valuert med m verdier. Abel bruker igjen Cauchys teorem og fastslår at denne gangen har vi $m = 5$.



8

$$\boxed{r + r_1 = (p + p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}} + v(p + p_1 S^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{m}} = z}$$

Cette fonction a m valeurs différentes, il faut donc que $m = 5$ en remarquant que m est un nombre premier. On aura par consequent

$$z = q + q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3 + q_4 y^4 = (p + p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}} + v(p + p_1 S^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{5}}$$

$q\ q_1\ q_2$ etc. étant des fonctions symetriques de $y_1\ y_1\ y_3$ etc. et par consequent des fonctions rationnelles de $a\ b\ c\ d$ et e. En combinant cette équation avec l'équation proposée, on en tirera la valeur de y exprimée par une fonction rationnelle de $z\ a\ b\ c\ d$ et e; Or une telle fonction est toujours réductible a la forme

$$y = P + R^{\frac{1}{5}} + P_2 R^{\frac{2}{5}} + P_3 R^{\frac{3}{5}} + P_4 R^{\frac{4}{5}}$$

on $P\ R\ P_2\ P_3$ et P_4 sont des fonctions de la forme $p + p_1 S^{\frac{1}{2}}$, $p\ p_1$ et S étant des fonctions rationnelles de $a\ b\ c\ d$ et e. De cette valeur de y on tire

$$R^{\frac{1}{5}} = \tfrac{1}{5}(y_1 + \alpha^4 y_2 + \alpha^3 y_3 + \alpha^2 y_4 + \alpha y_5) = (p + p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}}$$

où $\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

Or le premier membre a 120 valeurs différentes et le second membre seulement 10; par consequent y ne peut avoir la forme que nous vénons de trouver; mais nous avons demontré que y doit nécessairement avoir cette forme si l'équation proposée est resoluble, nous concluons donc:

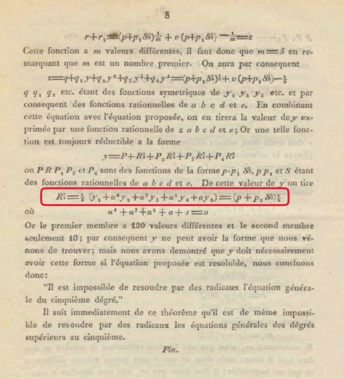
"Il est impossible de resoudre par des radicaux l'équation générale du cinquième dégré."

Il suit immediatement de ce théorême qu'il est de même impossible de resoudre par des radicaux les équations générales des dégrés supérieurs au cinquième.

Fin.

$$R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{m}\left(y_1 + \omega^4 y_2 + \omega^3 y_3 + \omega^2 y_4 + \omega y_5\right) = \left(p + p_1 S^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}}$$

Abel har nå etablert to uttrykk for $R^{\frac{1}{5}}$. Venstresiden antar 120 verdier når vi gjør alle mulige ombyttinger av røttene, mens høyresiden gir 10 verdier. Abel har dermed etablert en motsigelse mot den opprinnelige antagelsen.



8

$$r + r_1 = (p+p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}} + v\,(p+p_1 S^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{m}} = z$$

Cette fonction a m valeurs différentes, il faut donc que $m=5$ en remarquant que m est un nombre premier. On aura par consequent

$$z = q + q_1 y + q_2 y^2 + q_3 y^3 + q_4 y^4 = (p+p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}} + v\,(p+p_1 S^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{5}}$$

q q_1 q_2 etc. étant des fonctions symetriques de y_1 y_1 y_3 etc. et par consequent des fonctions rationnelles de a b c d et e. En combinant cette équation avec l'équation proposée, on en tirera la valeur de y exprimée par une fonction rationnelle de z a b c d et e; Or une telle fonction est toujours réductible a la forme

$$y = P + R^{\frac{1}{5}} + P_2 R^{\frac{2}{5}} + P_3 R^{\frac{3}{5}} + P_4 R^{\frac{4}{5}}$$

on P R P_2 P_3 et P_4 sont des fonctions de la forme $p+p_1 S^{\frac{1}{2}}$, p p_1 et S étant des fonctions rationnelles de a b c d et e. De cette valeur de y on tire

$$\boxed{R^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\,(y_1 + \alpha^4 y_2 + \alpha^3 y_3 + \alpha^2 y_4 + \alpha y_5) = (p + p_1 S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}}}$$

où

$$\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

Or le premier membre a 120 valeurs différentes et le second membre seulement 10; par consequent y ne peut avoir la forme que nous vénons de trouver; mais nous avons demontré que y doit nécessairement avoir cette forme si l'équation proposée est resoluble, nous concluons donc:

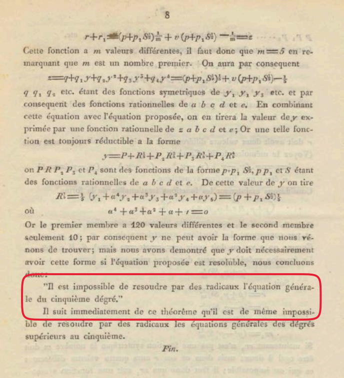
"Il est impossible de resoudre par des radicaux l'équation générale du cinquième dégré."

Il suit immediatement de ce théorême qu'il est de même impossible de resoudre par des radicaux les équations générales des dégrés supérieurs au cinquième.

Fin.

...nous concluons donc: "Il est impossible de resoudre par des radicaux l'équation générale de cinquième dégrée."

Niels Henrik Abel, 1824



8

$$r+r_1=(p+p_1S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{m}}+v(p+p_1S^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{m}}=z$$

Cette fonction a m valeurs différentes, il faut donc que $m=5$ en remarquant que m est un nombre premier. On aura par consequent

$$z=q+q_1y+q_2y^2+q_3y^3+q_4y^4=(p+p_1S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}}+v(p+p_1S^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{5}}$$

$q\ q_1\ q_2$ etc. étant des fonctions symetriques de $y_1\ y_2\ y_3$ etc. et par consequent des fonctions rationnelles de $a\ b\ c\ d$ et e. En combinant cette équation avec l'équation proposée, on en tirera la valeur de y exprimée par une fonction rationnelle de $z\ a\ b\ c\ d$ et e; Or une telle fonction est toujours réductible a la forme

$$y=P+R^{\frac{1}{5}}+P_2R^{\frac{2}{5}}+P_3R^{\frac{3}{5}}+P_4R^{\frac{4}{5}}$$

on $P\ R\ P_2\ P_3$ et P_4 sont des fonctions de la forme $p+p_1S^{\frac{1}{2}}$, $p\ p_1$ et S étant des fonctions rationnelles de $a\ b\ c\ d$ et e. De cette valeur de y on tire

$$R^{\frac{1}{5}}=\tfrac{1}{5}(y_1+\alpha^4y_2+\alpha^3y_3+\alpha^2y_4+\alpha y_5)=(p+p_1S^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}}$$

où $$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha+1=0$$

Or le premier membre a 120 valeurs différentes et le second membre seulement 10; par consequent y ne peut avoir la forme que nous vénons de trouver; mais nous avons demontré que y doit nécessairement avoir cette forme si l'équation proposée est resoluble, nous concluons donc:

"Il est impossible de resoudre par des radicaux l'équation générale du cinquième dégré."

Il suit immediatement de ce théorême qu'il est de même impossible de resoudre par des radicaux les équations générales des dégrés supérieurs au cinquième.

Fin.